Виктор Денисенко

Суммирование погрешностей измерений в системах автоматизации

Измерительные каналы систем автоматизации могут включать в себя несколько средств измерений различных типов, например датчики, измерительные преобразователи, модули аналогового и частотного ввода и вывода [1]. Погрешность такой системы желательно определять экспериментальным путём [2], однако это не всегда возможно или целесообразно. В таких случаях используют расчётный метод.

Исходные данные для расчёта

Исходными данными для расчёта погрешности измерительных каналов являются [3]:

- метрологические характеристики средств измерений;
- погрешность метода измерений (методическая погрешность);
- характеристики влияющих величин (например, окружающая температура, влажность);
- характеристики измеряемого сигнала.

ГОСТ 8.009-84 [4] для всех типов средств измерений устанавливает следующий комплекс метрологических характеристик, который указывается в эксплуатационной документации на средства измерений:

- систематическая составляющая основной погрешности;
- среднеквадратическое отклонение случайной составляющей основной погрешности;
- дополнительная погрешность для каждой из влияющих величин;
- динамическая погрешность.

Некоторые средства измерений обладают гистерезисом – для них, кроме перечисленных погрешностей, указывается случайная составляющая основной погрешности, вызванной гистерезисом.

Основная погрешность может быть указана без разделения её на части (на систематическую, случайную и погрешность от гистерезиса), и этот вариант является наиболее распространённым. Случайную составляющую указывают в случае, когда она больше 10% от систематической [4].

Дополнительная погрешность указывается в виде функции влияния внешнего фактора на основную погрешность или её составляющие: систематическую и случайную. Обычно эта функция представляет собой линейную зависимость, и тогда указывается только коэффициент влияния, например 0,05%/°C.

Динамическая погрешность указывается с помощью одной из следующих характеристик: импульсная, переходная, амплитудно-частотная и фазочастотная, амплитудно-фазовая характеристика, передаточная функция. Для минимально-фазовых цепей указывается только амплитудно-частотная характеристика, поскольку фазочастотная однозначно может быть получена из амплитудно-частотной характеристики.

Для расчёта методической погрешности могут быть указаны сопротивления проводов, среднеквадратическое значение или спектральная плотность помех в них, ёмкость, индуктивность и сопротивление источника сигнала, а также другие факторы, которые возникают при создании системы, включающей средства и объект измерений.

Характеристики измеряемого сигнала задаются в виде функции от времени или функции спектральной плотности. Для случайного входного сигнала задаётся спектральная плотность мощности или автокорреляционная функция. Во многих случаях для оценки погрешности бывает достаточно знания скорости нарастания входного сигнала.

Коэффициент корреляции

При расчёте погрешности измерительного канала возникает задача суммирования погрешностей средств измерений, которые являются случайными величинами. Способ суммирования будет различным в зависимости от того, являются ли случайные величины статистически зависимыми. Понятие статистической зависимости иллюстрирует рис. 1: если с ростом одной случайной величины X в среднем увеличивается (или уменьшается) и вторая (Y), то между этими величинами имеется статистическая зависимость. Для её количественного описания используются понятия ковариации или *коэффициента корреляции.*

Рассмотрим суммирование двух случайных погрешностей X и Y с нулевым математическим ожиданием (то есть центрированных случайных величин). Дисперсия суммы двух случайных величин по определению равна математическому ожиданию квадрата их суммы:

$$D[X \pm Y] = M\left[(X \pm Y)^2\right] = M\left[X^2 \pm 2XY + Y^2\right] =$$

$$= M\left[X^2\right] + M\left[Y^2\right] \pm 2M[XY] = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \pm 2K_{xy}, \quad (1)$$

где $D[\bullet]$ и $M[\bullet]$ – операторы дисперсии и математического ожидания; σ_x, σ_y – среднеквадратические отклонения случайных величин X и Y. Величина

$$K_{xy} = M[XY] \quad (2)$$

называется ковариацией («совместной вариацией») случайных величин X и Y.

Ковариацию дискретных случайных величин можно оценить по их дискретным значениям $X = \{x_1,...x_N\}$ и $Y = \{y_1,...y_N\}$ с помощью формулы среднего арифметического:

$$K_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i y_j. \quad (3)$$

Коэффициентом корреляции R_{xy} называют отношение ковариации к произведению среднеквадратических отклонений σ_x и σ_y случайных величин X и Y:

$$R_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{1}{N\sigma_x\sigma_y}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i y_j. \quad (4)$$

© СТА-ПРЕСС

Когда случайные величины независимы, их коэффициент корреляции равен нулю ($R_{xy} = 0$), и такие величины называются некоррелированными. Если коэффициент корреляции равен единице ($R_{xy} = 1$), то между величинами X и Y имеется не статистическая, а функциональная зависимость.

Используя понятие среднеквадратического отклонения $\sigma_x = \sqrt{D[X]}$, уравнение (1) можно записать в виде:

$$\sigma[X \pm Y] = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 \pm 2R_{xy}\sigma_x\sigma_y}. \qquad (5)$$

Здесь знак минус используется, когда случайные величины вычитаются, например, если находится разность напряжений двух измерительных каналов. При этом наличие корреляции между каналами частично уменьшает погрешность разности.

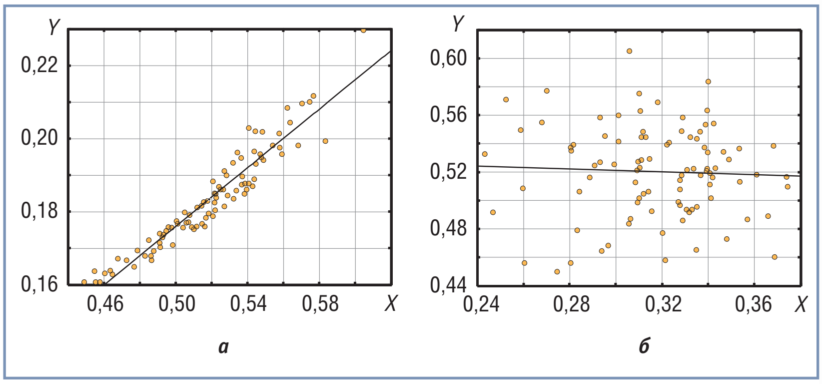


Рис. 1. Примеры сильной (*а*) и слабой (*б*) корреляции случайных величин *X* и *Y* (R_{xy} = 0,954 и R_{xy} = –0,045 соответственно); также показана прямая линия среднеквадратической регрессии

В случае когда случайные величины статистически независимы ($R_{xy} = 0$), выражение (5) упрощается:

$$\sigma[X \pm Y] = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}. \qquad (6)$$

Такое суммирование называют *геометрическим,* поскольку оно выполняется аналогично нахождению гипотенузы прямоугольного треугольника.

Если коэффициент корреляции $R_{xy} = +1$, то

$$\sigma[X \pm Y] = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 \pm 2\sigma_x\sigma_y} = \sqrt{(\sigma_x \pm \sigma_y)^2} = |\sigma_x \pm \sigma_y|. \qquad (7)$$

Если коэффициент корреляции равен $R_{xy} = -1$, то

$$\sigma[X \pm Y] = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 \mp 2\sigma_x\sigma_y} = \sqrt{(\sigma_x \mp \sigma_y)^2} = |\sigma_x \mp \sigma_y|, \qquad (8)$$

это означает, что при нахождении суммы случайных величин отрицательный коэффициент корреляции уменьшает итоговую погрешность, а при нахождении разности – увеличивает.

Если случайные величины не центрированы и имеют математические ожидания m_x и m_y, то коэффициент корреляции можно оценить как

$$R_{xy} = \frac{1}{N\sigma_x\sigma_y}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(x_i - m_x)(y_j - m_y). \qquad (9)$$

На рис. 1 показаны примеры статистической зависимости между случайными величинами при сильной (*а*) и слабой (*б*) корреляции. Точки на графике (значения случайной величины) могут группироваться очень близко к прямой линии, которая аппроксимирует эту зависимость, и тогда статистическая зависимость приближается к детерминированной. Степень отличия статистической зависимости от детерминированной характеризуют коэффициентом корреляции R_{xy}.

Прямая линия, проведённая таким образом, что сумма квадратов отклонений значений случайной величины от этой линии минимальна, называется линией среднеквадратической регрессии. Тангенс угла наклона этой линии называется коэффициентом регрессии. Уравнение линии регрессии можно получить методом наименьших квадратов; оно имеет вид [1]:

$y = A(x - m_x) + m_y$,

где A – коэффициент регрессии. Коэффициент регрессии вычисляется через коэффициент корреляции R_{xy} и среднеквадратические отклонения σ_y и σ_x как

$$A = R_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}. \qquad (10)$$

Коэффициент корреляции приобретает ясный физический смысл, если статистические переменные центрировать (вычесть математическое ожидание) и нормировать на величину среднеквадратического отклонения. Поскольку среднеквадратические отклонения нормированных величин равны единице, то коэффициент корреляции (9) становится равен тангенсу наклона линии среднеквадратической регрессии.

Статистическая зависимость между погрешностями средств измерений в общем случае нелинейная, однако этой нелинейностью обычно пренебрегают.

Точечные и интервальные оценки погрешности

Погрешности средств измерений и измерительных каналов средств автоматизации могут быть выражены двумя различными способами: с помощью точечных оценок и с помощью интервальных. К точечным оценкам относятся математическое ожидание погрешности и среднеквадратическое отклонение. В качестве интервальной оценки используют интервал погрешности, который охватывает все возможные значения погрешности измерений с вероятностью P. Она называется доверительной вероятностью, или надёжностью оценки погрешности.

Предел допускаемой погрешности можно рассматривать как точечную оценку или как интервальную для доверительной вероятности, равной единице.

Интервальная оценка является более гибкой, поскольку она позволяет указать погрешность измерений в зависимости от того, какая требуется вероятность реализации этой погрешности для конкретных условий эксплуатации средства измерений.

Смысл интервальной оценки погрешности иллюстрирует рис. 2. Здесь использованы следующие обозначения: Δ – погрешность измерения; $p(\Delta)$ – плотность распределения погрешностей; $\Phi(\Delta)$ – функция распределения погрешностей,

$$\Phi(\Delta) = \int_{-\infty}^{\Delta} p(x)dx.$$

Для нормального закона распределения погрешностей (закона Гаусса) плотность распределения центрированной случайной величины Δ описывается функцией

$$p(\Delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right)^2},$$

где σ – среднеквадратическая погрешность.

Если погрешность измерения Δ находится внутри интервала $\Delta_1 < \Delta < \Delta_2$, то вероятность этого события вычисляется как

© СТА-ПРЕСС

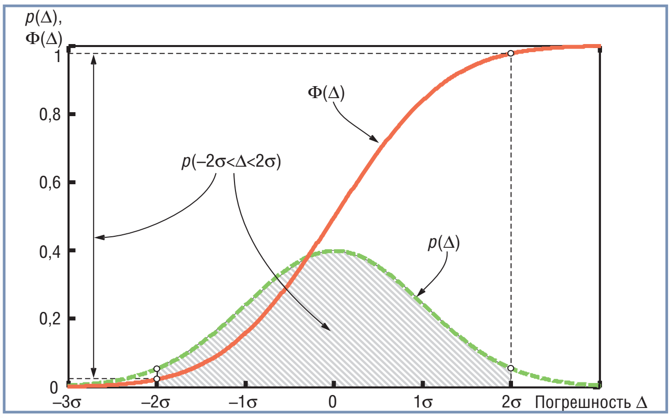


Рис. 2. Иллюстрация понятий доверительного интервала и доверительной вероятности

$$P(\Delta_1 < \Delta < \Delta_2) = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} p(x)dx = \Phi\left(\frac{\Delta_2}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\Delta_1}{\sigma}\right). \qquad (11)$$

В наиболее типичном случае симметричных границ ($-\Delta_0 < \Delta < \Delta_0$) получим

$$P(-\Delta_0 < \Delta < \Delta_0) = \Phi\left(\frac{\Delta_0}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\Delta_0}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\Delta_0}{\sigma}\right) - 1. \qquad (12)$$

Здесь использовано свойство симметрии функции распределения для закона Гаусса.

Таким образом, если задан интервал $-\Delta_0 < \Delta < \Delta_0$, который содержит в себе погрешность измеряемого параметра Δ, то вероятность того, что погрешность Δ не выходит за границы интервала, можно найти по формуле (12) для нормального закона распределения. Вероятность $P(-\Delta_0 < \Delta < \Delta_0)$ называют также надёжностью оценки погрешности и обозначают символом γ:

$$\gamma = 2\Phi\left(\frac{\Delta_0}{\sigma}\right) - 1. \qquad (13)$$

Для вычисления функции распределения удобно использовать пакеты Mathcad, MATLAB. С их помощью из формулы (13) несложно найти величину доверительного интервала $[-\Delta_0, +\Delta_0]$, если задана величина надёжности γ.

Для $\Delta_0 = \sigma$ доверительная вероятность равна $\gamma = 68{,}3\%$, для $\Delta_0 = 2\sigma$ она уже равна $\gamma = 95{,}3\%$, для $\Delta_0 = 3\sigma$ составляет $\gamma = 99{,}7\%$ и для $\Delta_0 = 4\sigma$ достигает $\gamma = 99{,}994\%$.

Для увеличения надёжности оценки погрешности измерений или для сужения доверительного интервала при заданной надёжности можно использовать усреднение результатов многократных измерений. Поскольку оценка среднеквадратической погрешности результата усреднения $\sigma_{ср}$ равна [1], где σ_x – среднеквадратическая погрешность средства измерений, N – количество однократных измерений, то, подставив в (13) вместо σ величину $\sigma_{ср}$, получим

$$\sigma_{ср} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}. \qquad (14)$$

Эта формула позволяет найти количество однократных измерений N, которое необходимо усреднить для получения требуемого доверительного интервала $[-\Delta_0, +\Delta_0]$ при заданной надёжности γ или требуемой надёжности γ при заданном доверительном интервале $[-\Delta_0, +\Delta_0]$. Поскольку формула (14) задана в неявном виде, для нахождения требуемых неизвестных следует воспользоваться математическими пакетами для компьютерных вычислений.

Следует иметь в виду, что повышение точности путём усреднения результатов многократных измерений имеет *множество ограничений* [1].

Проблемой использования интервального метода оценки погрешности является необходимость знания закона распределения погрешностей.

Отметим, что доверительные интервалы, полученные из рассеяния множества измерений, никак не учитывают систематическую погрешность измерений. Интересные примеры из истории определения расстояния до Солнца, заряда электрона и др. приводятся в книге [5]. Учёные, которые делали эти выдающиеся измерения, указывали доверительные вероятности для оценки точности своих измерений. Однако ни одна из этих оценок не выдержала испытания временем: каждое новое, более точное измерение не укладывается в предсказанный ранее доверительный интервал. Это связано с тем, что систематическую погрешность или наличие ошибки в постановке эксперимента, в учёте факторов, о существовании которых мы не знаем, оценить невозможно, не имея более точного измерительного прибора.

Погрешность метода измерений

Для выполнения автоматизированных измерений используют датчики и измерительные преобразователи, измерительные модули ввода аналоговых сигналов, обработку результатов измерений на компьютере или в контроллере. При этом на погрешность результата измерений оказывают влияние следующие факторы:

- сопротивление кабелей;
- соотношение между входным импедансом средства измерений и выходным импедансом датчика;
- качество экранирования и заземления, мощность источников помех;
- погрешность метода косвенных, совместных или совокупных измерений;
- наличие внешних влияющих факторов, если они не учтены в дополнительной погрешности средства измерений;
- погрешность обработки результатов измерений программным обеспечением.

Все погрешности, которые не могут быть учтены в процессе сертификационных испытаний и внесены в паспорт средства измерений, а появляются в конкретных условиях применения, относятся к методическим. В отличие от них, инструментальные погрешности нормируются в процессе производства измерительного прибора и заносятся в его эксплуатационную документацию. Таким образом, если в состав смонтированной автоматизированной измерительной системы входят средства измерений с нормированными погрешностями, то погрешность, вызванная ранее перечисленными факторами, является методической. Если же выполняется сертификация всей измерительной системы, то методические погрешности могут быть учтены в погрешности всей системы, и тогда они переходят в разряд инструментальных.

Для расчёта или измерения методической погрешности трудно дать общие рекомендации. Каждый конкретный случай требует отдельного рассмотрения.

Погрешность программного обеспечения

Погрешность программного обеспечения (ПО) [6, 7] оценивается как разность между результатами измерений, полученными данным ПО и эталонным ПО. Под эталонным понимается программное обеспечение, высокая точность которого доказана многократными испытаниями и тестированием. Понятие эталонного ПО является условным и определя-

© СТА-ПРЕСС

ется соглашением между заказчиком аттестации и исполнителем. В качестве эталонного может быть использовано ранее аттестованное ПО.

К основным источникам погрешностей ПО относятся:

- ошибки записи исходного текста программы и ошибки трансляции программы в объектный код;
- ошибки в алгоритме решения измерительной задачи;
- ошибки в таблицах для линеаризации нелинейных характеристик преобразования;
- применение неустойчивых или медленно сходящихся алгоритмов при решении плохо обусловленных измерительных задач;
- ошибки преобразования форматов данных;
- ошибки округления и др.

Надёжность (достоверность) ПО обеспечивается средствами защиты от несанкционированных изменений, которые могут явиться причиной появления не учтённых при аттестации погрешностей.

Достоверность измерений

В процессе выполнения измерений могут появиться грубые ошибки (промахи), которые делают измерения недостоверными, несмотря на применение очень точных измерительных приборов. Здесь под *достоверностью* понимается степень доверия к полученным результатам. Достоверность может быть низкая при наличии погрешностей, о существовании которых экспериментатор не догадывается. Достоверность при использовании автоматизированных измерительных систем снижается с ростом их сложности и существенно зависит от квалификации персонала проектирующей и монтажной организаций.

Главным методом обеспечения достоверности является сопоставление результатов измерения одной и той же величины разными, не связанными друг с другом способами. Например, после монтажа системы измерения температуры в силосе элеватора следует сравнить показания автоматизированной системы и автономного контрольного термометра, чтобы убедиться в правильности показаний автоматизированной системы.

Приведём несколько примеров, иллюстрирующих случаи, когда, несмотря на применение точных средств измерений, получаются совершенно ошибочные данные, вводящие человека в заблуждение.

Пример 1. Для измерения температуры *воздуха* в теплице использован датчик температуры с погрешностью ±0,5°С. Однако датчик установлен таким образом, что в некоторые часы на него падают прямые лучи солнца, которые нагревают датчик, но не изменяют температуру воздуха. При этом погрешность измерения температуры *воздуха* может составить +5°С, что позволяет квалифицировать результат измерения как недостоверный.

Пример 2. Для измерения температуры в силосах элеватора установлены точные датчики и сделан тщательный монтаж, но расположенный на крыше элеватора ретранслятор сотовой связи оказался незамеченным, и не было принято достаточных мер для защиты от помех. При этом погрешность измерения температуры может составить ±10°С вследствие помех, наведённых передатчиком в сигнальных кабелях системы.

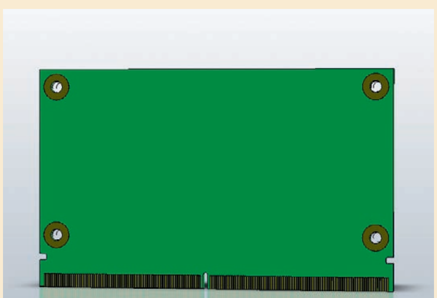
Пример 3. В автоматизированной системе для измерения параметров продукции использован модуль ввода с погрешностью ±0,05%, однако при наладке системы программист по

НОВОСТИ НОВОСТИ НОВОСТИ НОВОСТИ НОВОСТИ НОВОСТИ

Компания ADLINK берётся за ARM-технологии и присоединяется к новому COM-стандарту

Компания ADLINK Technology объявила о намерении поддержать новый стандарт Computer-on-Module (COM) компании Kontron, разработанный для платформ с архитектурой сверхмалого энергопотребления для применения в новой линейке продукции. Это первая попытка ADLINK выйти за границы стандартно предлагаемых компанией решений в форм-факторе x86. Компания опирается на опыт разработки решений ARM/RISC для OEM-заказчиков и проектов с применением интеллектуальных дисплеев. Новый COM-стандарт делает возможным создание очень тонких и низкопрофильных систем ARM/RISC и SOC на базе процессоров со сверхнизким энергопотреблением.

Стандарт нацелен на новый быстрорастущий рынок портативных мобильных устройств, промышленных планшетных компьютеров. В ближайшем будущем ожидается его движение также и в сторону традиционных применений, таких как промышленная автоматизация и передача данных.



Компактный модуль 82×50 мм

В основе конструкции лежит 314-контактный разъём MXM 3.0, допускающий общую высоту модуля и платы-носителя менее 5 мм. Стандарт определяет размеры двух вариантов модулей: сверхкомпактного «короткого» модуля 82×50 мм и полноразмерного модуля 82×80 мм. По назначению контактов на разъёме предусматривается поддержка как традиционных функций, например RGB 24 бит, так и поддержка в будущем более современных стандартов, например LVDS, HDMI и DisplayPort. Ожидается, что потребляемая данными устройствами ARM/RISC мощность будет порядка 3 Вт.

Поддержка модели, основанной на ARM/RISC, будет значительно отличаться от сопровождения традиционных платформ x86. Даже несмотря на то что драйверы для платформ x86 являются универсальными и поставляются несколькими вендорами, нагрузка на поставщиков оборудования ARM/RISC будет намного выше. ADLINK вкладывает значительные средства в новую инфраструктуру, чтобы обеспечить разработку драйверов, поддержку различных настроек и приложений, которые специально направлены на решения ARM/RISC, и не только для COM-модулей, но и для всех продуктовых линеек. Присоединение ADLINK к новому форм-фактору – это только первый шаг в принятии платформ ARM/ RISC, за ним вскоре последуют и другие, инициированные этим стандартом и направленные на развитие технологий ARM/ RISC.

Отношение цена–производительность ARM и RISC позволит ADLINK предложить модульные решения по цене существенно ниже $100. На рынке встраиваемых систем этот уровень цен требовался уже много лет, однако при использовании платформ x86 он был недостижим. Компания ADLINK надеется представить первые образцы продукции в новом стандарте в конце февраля 2012 года на международной выставке Embedded World в Нюрнберге. ●

© СТА-ПРЕСС

ошибке установил частоту помехоподавляющего режекторного фильтра не 50, а 60 Гц. Проведённые приёмо-сдаточные испытания системы не позволили выявить эту ошибку. В результате погрешность измерений вследствие наведённой помехи с частотой 50 Гц может повыситься до ±10% вместо ожидаемых ±0,05%.

Пример 4. Во время выполнения измерений ваш коллега разговаривал по сотовому телефону. Наводка сигнала от передатчика сотового телефона может повысить погрешность измерений в несколько раз.

Пример 5. При монтаже системы заземлили экран сигнального кабеля с двух сторон. Проведённые приёмо-сдаточные испытания не позволили выявить эту ошибку. Погрешность может увеличиться в несколько раз по сравнению с ожидаемой.

Пример 6. В процессе эксплуатации системы нарушился контакт в цепи заземления, что привело к эпизодическому повышению уровня помех в измерительной цепи. В статье [8] описан пример, когда плохо затянутый болт в цепи заземления приводил к сбоям системы автоматики, причину которых искали несколько лет.

Пример 7. При расчёте погрешности средств измерений была проигнорирована динамическая погрешность, поскольку исходные данные для её расчёта не были указаны в эксплуатационной документации на средство измерения и не были выявлены в процессе приёмо-сдаточных испытаний ввиду сложности постановки эксперимента, отсутствия времени и приборов для контроля величины погрешности. Во время эксплуатации системы фактическая погрешность в несколько раз превысила расчётную.

В приведённых примерах сложно обнаружить наличие погрешности в процессе сдачи системы в эксплуатацию, она может появляться в особых условиях эксплуатации. Это приводит к снижению достоверности измерений, несмотря на высокую инструментальную точность использованных технических средств.

Общий подход к решению проблемы заключается в применении второй, независимой системы или методики измерений для обнаружения ошибок. Можно использовать также целый комплекс мер, включая подбор персонала, соблюдение графика поверки, тщательность выполнения типовых и сертификационных испытаний системы, соблюдение методики измерений и обслуживания измерительной системы.

Термин «достоверность» иногда используется во втором его значении – для указания вероятности того, что измеренное значение находится в заданном доверительном интервале [9] при условии, что все промахи и ошибки измерительной системы и методики измерений исключены. Количественным выражением достоверности в данном случае является доверительная вероятность [1]. Следует различать эти два значения одного и того же термина.

Методы суммирования погрешностей

Перед суммированием все погрешности делятся на следующие группы:

- систематические и случайные;
- в группе случайных – на коррелированные и некоррелированные;
- аддитивные и мультипликативные;
- основные и дополнительные.

Такое деление необходимо потому, что систематические и случайные погрешности, а также коррелированные и некоррелированные суммируются по-разному, а аддитивные погрешности нельзя складывать с мультипликативными.

Если некоторые погрешности указаны в виде доверительных интервалов, то перед суммированием их нужно представить в виде среднеквадратических отклонений [1].

Дополнительные погрешности могут складываться с основными либо перед суммированием погрешностей, либо на заключительном этапе, в зависимости от поставленной задачи. Второй вариант часто предпочтительнее, поскольку он позволяет оценивать погрешность всего измерительного канала в зависимости от величины внешних влияющих факторов в конкретных условиях эксплуатации.

При последовательном соединении нескольких средств измерений погрешности, проходя через измерительный канал с передаточной функцией (функцией преобразования) $f(x)$, могут усиливаться или ослабляться. Для учёта этого эффекта используют коэффициенты влияния, которые определяются как $\frac{df(x)}{dx} \approx K_x$.

Все погрешности перед суммированием приводят к выходу (или входу) измерительного канала путём умножения (деления) на коэффициент влияния. В дальнейшем будем предполагать, что такое приведение уже выполнено.

Погрешности средств измерений являются случайными величинами, поэтому при их суммировании в общем случае необходимо учитывать соответствующие законы распределения. На практике пользуются более грубыми упрощёнными методами, разработанными математической статистикой.

Математическое ожидание погрешностей средств измерений, как правило, равно нулю. Если это не так, то его (в виде поправки) складывают с систематической составляющей погрешности. В средствах автоматизации введение поправки выполняется автоматически с помощью микроконтроллера, входящего в состав средств измерений. Математическое ожидание случайной составляющей всегда равно нулю, поскольку при нормировании метрологических характеристик его относят к систематической составляющей.

Наиболее полное определение итоговой погрешности измерительного канала состояло бы в нахождении функции распределения суммы нескольких погрешностей измерения. Однако функция распределения суммы случайных величин находится с помощью операции свёртки [10], что приводит к значительным практическим трудностям. Поэтому для оценки итоговой погрешности ограничиваются только суммированием дисперсий погрешностей.

Погрешности суммируют по однородным группам, затем находят общую погрешность, используя геометрическое суммирование для случайных погрешностей и алгебраическое для детерминированных.

Существует три способа суммирования погрешностей:

- алгебраический

$$\sigma_\Sigma = \sum_{i=1}^{N} \Delta_i, \qquad (15)$$

где i – номер погрешности, N – их количество;

- геометрический

$$\sigma_\Sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2}, \qquad (16)$$

© СТА-ПРЕСС

где σ_i – среднеквадратическое значение i-й погрешности;

- с учётом корреляции

$$\sigma_\Sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j<i} R_{ij}\sigma_i\sigma_j} \quad . \qquad (17)$$

В этой формуле $j \neq i$ потому, что члены с $j = i$ уже учтены в сумме $\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2$, а граница $j < i$ установлена для того, чтобы суммировать только члены, лежащие ниже диагонали корреляционной матрицы, поскольку вследствие её симметричности $R_{ij}\sigma_i\sigma_j + R_{ji}\sigma_j\sigma_i = 2R_{ij}\sigma_i\sigma_j$.

При $R_{ij} = +1$ выражение (17) переходит в формулу алгебраического суммирования:

$$\sigma_\Sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j<i}\sigma_i\sigma_j} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\right)^2} = \sum_{i=1}^{N}\sigma_i \,, \qquad (18)$$

где σ_i складываются со своими знаками, то есть коррелированные погрешности с противоположными знаками частично взаимно компенсируются, если их коэффициент корреляции равен единице.

При $R_{ij} = -1$ погрешности вычитают попарно в соответствии с (8):

$$\sigma_\Sigma = \sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2 - 2\sigma_i\sigma_j} = \sqrt{\left(\sigma_i - \sigma_j\right)^2} = \left|\sigma_i - \sigma_j\right| \,, \qquad (19)$$

то есть при отрицательной корреляции погрешности частично компенсируются, если они имеют один и тот же знак.

Учитывая, что получить удовлетворительные оценки коэффициентов корреляции довольно трудно, используют следующий приём: при $|R_{ij}| \geq 0{,}7$ считают, что $|R_{ij}| = 1$, при $|R_{ij}| < 0{,}7$ полагают $|R_{ij}| = 0$ [9, 10].

Систематические погрешности

В наиболее типовом случае систематические составляющие основных погрешностей средств измерений суммируются геометрически по формуле (16), поскольку они являются случайными величинами.

Формулы геометрического суммирования были получены для среднеквадратических погрешностей [1]. Поэтому, если комплекс метрологических характеристик средств измерений включает предел допускаемых значений систематической составляющей основной погрешности Δ_{os} без указания среднеквадратического значения (по ГОСТ 8.009-84 [4]), то соответствующее ему среднеквадратическое значение находят в соответствии с рекомендациями РД 50-453-84 [11] по формуле

$$\sigma = \frac{\Delta_{os}}{\sqrt{3}} \,. \qquad (20)$$

Эта формула справедлива, если нет оснований полагать, что функция распределения данной погрешности является несимметричной и имеет несколько максимумов.

Метрологическая инструкция МИ 2232-2000 [12] рекомендует иную формулу – половину предела допускаемой погрешности.

Выбор способа суммирования систематических составляющих основных погрешностей не является однозначным, и это связано с отсутствием полной информации о законе распределения. Дело в том, что причиной существования основной погрешности является как технологический разброс параметров электронных компонентов, так и нескомпенсированная нелинейность. Технологический разброс обычно является случайным, и на этом основании систематическая составляющая погрешности может рассматриваться как случайная величина на множестве средств измерений одного и того же ти-

© СТА-ПРЕСС

па. Поэтому в формулах для расчёта погрешностей она учитывается *геометрически*. Однако нелинейность передаточной характеристики средства измерений (нелинейность АЦП, нормирующих усилителей, термопар) у всех экземпляров приборов одного типа будет иметь примерно один и тот же вид, величину и знак. Например, погрешность, вызванная нелинейностью, в начале шкалы может быть положительной, в середине шкалы – отрицательной, у верхнего предела шкалы – опять положительной, и так *для всех экземпляров* приборов одного типа. Поэтому погрешности, обусловленные нелинейностью, должны суммироваться *алгебраически*.

В современных модулях аналогового ввода используется автоматическая калибровка, позволяющая уменьшить случайную компоненту систематической погрешности, и в этом случае преобладающей является детерминированная погрешность нелинейности.

Поскольку ГОСТ 8.009-84 [4] не предусматривает нормирование таких тонких нюансов поведения погрешностей, выбор способа суммирования начинает зависеть не от технических, а от политических факторов. Если фактическая погрешность окажется выше расчётной и это повлечёт за собой угрозу жизни людей, большой экономический ущерб, техногенную катастрофу и т. п. [12], то суммирование погрешностей выполняют алгебраически, причём используют не среднеквадратические отклонения, а пределы допустимых значений погрешности.

Если известен знак систематической погрешности, то его учитывают при суммировании.

Для наиболее ответственных применений следует использовать средства измерений, для которых указана погрешность без разделения на случайную и систематическую компоненты, поскольку в этом случае погрешность указана с доверительной вероятностью, равной единице. Если же используются средства измерений, для которых указана случайная составляющая, то для них рассчитывают величину погрешности при доверительной вероятности, равной единице. Это условие существенно завышает требования к точности средства измерений.

Алгебраическое суммирование часто даёт слишком завышенную оценку погрешности. Поэтому МИ 2232-2000 [12] предусматривает промежуточный вариант между формулами геометрического и алгебраического суммирования:

$$\sigma_\Sigma = K\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2}\,, \qquad (21)$$

где K – поправочный коэффициент, равный 1,2 для наиболее важных параметров устройств аварийной защиты и блокировки, контроля за соблюдением требований техники безопасности и экологической безопасности, контроля характеристик готовой продукции [12].

Для конкретных экземпляров приборов могут быть указаны не номинальные характеристики (имеющие одну и ту же величину для всех приборов данного типа), а индивидуальные. В этом случае систематическая погрешность является не случайной, а детерминированной величиной, поэтому должна учитываться в итоговой погрешности измерительного канала *алгебраически*.

Случайные составляющие погрешностей

Случайные составляющие основной погрешности средств измерений по ГОСТ 8.009-84 [4] задаются своими среднеквадратическими отклонениями, поэтому их суммирование выполняется непосредственно по формуле геометрического суммирования (16).

Если случайная погрешность является коррелированным случайным процессом [1] и задана в виде функции автокорреляции $R(t)$ или спектральной плотности мощности $S(f)$, то сначала находят среднеквадратическое значение случайной составляющей погрешности. Для этого используют формулу:

$$\sigma^2 = 2\int_0^{f_в} S(f)\,df\,, \qquad (22)$$

где $f_в$ – верхняя граничная частота полосы пропускания всего измерительного канала или цифрового фильтра, используемого при обработке полученных данных. Если задана функция автокорреляции, то спектральную плотность мощности находят по формуле, учитывающей корреляцию [1].

Случайная составляющая погрешности может быть уменьшена в несколько раз (в зависимости от величины фликкер-шума) путём усреднения результатов многократных измерений [1].

Дополнительные погрешности

Дополнительные погрешности задаются в виде функции влияния внешних факторов (температуры, влажности, напряжения питания) на основную погрешность измерения, или, в случае линейной функции влияния, они характеризуются коэффициентом влияния. Например, может быть задано, что основная погрешность увеличивается на +0,05% при изменении напряжения питания на +20%.

Если задан диапазон изменения влияющих величин, в качестве их математического ожидания для расчётов с помощью функции влияния берут их среднее значение [11].

Среднеквадратическое отклонение дополнительной погрешности для линейной функции влияния находят по формуле [11]:

$$\sigma_\xi = K_\xi\,\frac{\xi_1 - \xi_2}{2\sqrt{3}}\,, \qquad (23)$$

где K_ξ – коэффициент влияния внешнего фактора; ξ_1, ξ_2 – нижняя и верхняя границы изменения влияющей величины.

Дополнительная погрешность может увеличивать как систематическую, так и случайную составляющую основной погрешности. Для этого функции влияния задаются раздельно на каждую составляющую.

Если известно, что дополнительные погрешности нескольких средств измерений коррелируют (например, синхронно возрастают при увеличении напряжения питания в сети или температуры окружающей среды), то такие погрешности суммируют как коррелированные величины с учётом коэффициента корреляции в соответствии с (17) – (19).

Дополнительные погрешности считаются несущественными, если их сумма составляет менее 17% от наибольшего возможного значения инструментальной погрешности в рабочих условиях эксплуатации [4].

Динамические погрешности

Динамическая погрешность при известном входном сигнале является детерминированной. Она обычно приводит к занижению показаний измерительного прибора. Суммирование таких погрешностей выполняется алгебраически.

Подробнее об оценке динамической погрешности см. [1, 10].

Динамическая погрешность считается несущественной, если она составляет менее 17% от наибольшего возможного значения инструментальной погрешности в рабочих условиях эксплуатации [4].

© СТА-ПРЕСС

Нахождение итоговой погрешности

После суммирования погрешностей по группам, как это было описано ранее, результат измерения обычно выражают в виде:

$$x = (x_0 + \Delta) \pm \sigma, \qquad (24)$$

где x_0 – измеренное значение; Δ – сумма всех погрешностей, которые складывались алгебраически, то есть детерминированных погрешностей (детерминированные погрешности могут быть прибавлены к измеренной величине в качестве поправки); σ – сумма всех случайных погрешностей, которые складывались геометрически, в том числе с учётом корреляционных связей:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2_{\Sigma\text{сист}} + \sigma^2_{\Sigma\text{случ}} + \sigma^2_{\Sigma\text{доп}} + \sigma^2_{\Sigma\text{метод}}}, \qquad (25)$$

где $\sigma_{\Sigma\text{сист}}$ – сумма всех систематических погрешностей измерительного канала; $\sigma_{\Sigma\text{случ}}$ – сумма всех случайных погрешностей; $\sigma_{\Sigma\text{доп}}$ – сумма всех дополнительных погрешностей; $\sigma_{\Sigma\text{метод}}$ – сумма всех случайных составляющих методических погрешностей, включая погрешность программного обеспечения. Детерминированные составляющие методических погрешностей учитываются в слагаемом Δ.

Вместо среднеквадратического отклонения может быть указан предел допустимых значений. Однако должно быть явно указано, какая именно оценка погрешности использована, поскольку доверительные вероятности для предела допустимых значений (единица) и для среднеквадратического отклонения (0,68) существенно отличаются.

Случайная, систематическая и дополнительная погрешности могут быть указаны раздельно. МИ 1317-2004 [13] рекомендует «вместе с результатом измерений представлять характеристики его погрешности или их статистические оценки». Поэтому состав характеристик погрешности может быть выбран в каждом конкретном случае индивидуально, в зависимости от смысла решаемой задачи.

При выполнении многократных измерений результат должен также содержать указание на количество измерений, использованных при усреднении, и интервал времени, в течение которого были выполнены измерения [13].

Поскольку выражение для суммы дисперсий случайных величин (1) получено независимо от закона распределения, геометрическое суммирование погрешностей даёт правильное значение дисперсии независимо от законов распределения отдельных составляющих. Однако при этом ничего нельзя сказать о функции распределения суммарной погрешности, в том числе о надёжности (доверительной вероятности) полученного результата. Тем не менее, поскольку при суммировании пяти и более погрешностей закон распределения суммы близок к нормальному независимо от законов распределения отдельных слагаемых [10], то, зная среднеквадратическое отклонение итоговой погрешности, можно использовать нормальный закон распределения для указания доверительного интервала и доверительной вероятности результата измерений.

Нахождение погрешности измерительного канала в условиях недостатка исходных данных

При оценке погрешности измерительных каналов средств автоматизации следует по возможности использовать экспериментальный метод. Однако в случаях когда это невозможно или экономически нецелесообразно, делают расчёт по изложенной ранее методике. Типичной проблемой, которая при этом возникает, является отсутствие некоторых исходных данных. В этой ситуации метрологическая инструкция МИ 2232-2000 [12] рекомендует использовать следующие «значения по умолчанию»:

- среднеквадратическое значение погрешности принимается равным половине предела допускаемых значений погрешности;
- математическое ожидание основной и дополнительной погрешности принимается равным нулю;
- корреляция между отдельными составляющими погрешности отсутствует;
- случайная составляющая погрешности измерений является некоррелированной случайной величиной (белым шумом) или вырождается в систематическую погрешность;
- функции распределения внешних влияющих величин предполагаются равномерными или нормальными;
- считается, что инерционные свойства средств измерений не оказывают влияния на погрешность измерений. ●

Литература

1. Денисенко В.В. Компьютерное управление технологическим процессом, экспериментом, оборудованием. – М. : Горячая линия – Телеком, 2009. – 608 с.
2. МИ 2440-97. ГСИ. Методы экспериментального определения и контроля характеристик погрешности измерительных каналов измерительных систем и измерительных комплексов (взамен МИ 2313-94).
3. ГОСТ 23222-88. Характеристики точности выполнения предписанной функции средств автоматизации. Требования к нормированию. Общие методы контроля.
4. ГОСТ 8.009-84. Государственная система обеспечения единства измерений. Нормируемые метрологические характеристики средств измерений.
5. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей и случайных процессов. Основы математического аппарата и прикладные аспекты. – М. : Изд-во МГУ, 1992. – 400 с.
6. МИ 2955-2005. ГСИ. Типовая методика аттестации программного обеспечения средств измерений и порядок её проведения.
7. МИ 2891-2004. ГСИ. Общие требования к программному обеспечению средств измерений.
8. Burleson J. Wiring and grounding to prevent power quality problems with industrial equipment // Textile, Fiber and Film Industry Technical Conference, 8–9 May 1991. – Pp. 5/1–5/6.
9. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. – Л. : Энергоатомиздат, 1991. – 304 с.
10. Орнатский П.П. Теоретические основы информационно-измерительной техники. – 2-е изд. – Киев : Вища школа, 1983. – 455 с.
11. РД 50-453-84. Методические указания. Характеристики погрешности средств измерений в реальных условиях эксплуатации. Методы расчёта.
12. МИ 2232-2000. ГСИ. Обеспечение эффективности измерений при управлении технологическими процессами. Оценивание погрешности измерений при ограниченной исходной информации.
13. МИ 1317-2004. ГСИ. Результаты и характеристики погрешности измерений. Формы представления. Способы использования при испытаниях образцов продукции и контроле их параметров (взамен ГОСТ 8.011-72, МИ 1317-86).

© СТА-ПРЕСС