

Модель потенциального рассеяния в задаче диагностики слоистых диэлектриков

Александр Крячко

Для решения ряда практических задач, связанных с идентификацией дефектов и повреждений в материалах, установлением состояния конструкций, выявлением неоднородностей в оптически непроницаемых средах и визуализацией их структуры, необходимо обрабатывать информацию, полученную дистанционно, что предусматривает оценку материальных параметров объектов исследования и установление их пространственного распределения. В отличие от математической теории обратных задач рассеяния, которая направлена главным образом на доказательство теорем о существовании и единственности решения, важное прикладное значение имеет разработка вычислительных процедур, которые позволят найти параметры рассеивателей при реальных условиях проведения измерений. Целью статьи является повышение эффективности средств оценивания параметров неоднородных сред по известному распределению рассеянного электромагнитного поля путём решения обратных задач рассеяния. Рассмотрен метод решения обратной задачи рассеяния по коэффициенту отражения для многослойных структур без потерь, высокая точность которого достигается за счёт конечного количества коэффициентов решений Йоста, что позволило избежать вычислений коэффициентов безграничных тригонометрических последовательностей в элементах матрицы рассеяния. Полученные результаты позволили осуществить оценку количества слоёв диэлектрической структуры, установить диэлектрическую проницаемость и ширину каждого слоя по значениям комплексного коэффициента отражения, который известен по результатам измерений на дискретном множестве частот в ограниченном диапазоне. Это дало возможность анализировать диэлектрические материалы неразрушающим методом и идентифицировать расслоение и отклонения параметров слоёв от технологически заданных значений. Разработан метод определения распределения диэлектрической проницаемости вдоль поперечной координаты в диэлектрических плоскостройных структурах, и развитые алгоритмы идентификации поверхностей раздела по коэффициенту отражения нормально падающей плоской волны использованы как процедуры обработки сигналов в средствах подповерхностной радиолокации, что позволило избежать ложного обнаружения неоднородностей при анализе структуры сред.

Введение

Высокая эффективность современных средств неразрушающего контроля и дистанционного зондирования в основном достигается за счёт внедрения надлежащей обработки результатов измерений. При диагностике неоднородных сред используют свойства рассеяния упругих и электромагнитных волн, а обработку измеренных значений напряжённости рассеянного поля осуществляют на основе решения соответствующей обратной

задачи относительно параметров среды. В случае плоских слоистых сред для решения таких задач используют одномерную модель. В теории обратных задач разработаны методы [1–5], для которых исходными данными являются комплекснозначная зависимость коэффициента отражения от частоты или импульсная характеристика, определяемая преобразованием Фурье комплексной функции коэффициента отражения. Измерение комплексных значений пара-

метров электромагнитного поля и, в частности, коэффициента отражения [6, 7] в широком частотном диапазоне является довольно сложной задачей. В то же время точное векторное представление параметров в комплексной плоскости является одной из предпосылок корректной формулировки обратных задач. В измерительных средствах используют мостовые [8] и гетеродинные [9] схемы сравнения значений напряжённости поля в точке измерения с полем от эталонного источника гармонических колебаний. По фазовым и амплитудным различиям определяют измерительную комплексную величину. Создание средств высокочастотных широкополосных измерений является очень затратным. Они требуют прецизионной калибровки и контроля параметров в течение эксплуатации, что существенно ограничивает сферу применения таких приборов. Поэтому для устройств неразрушающего контроля, выпускаемых серийно, более пригодными являются методики высокочастотных широкополосных измерений, не требующие определения комплекснозначных параметров. Это требует развития нового направления исследований, целью которого является решение обратной задачи при частично известных исходных данных. Одним из возможных вариантов является формулировка задачи, когда за исходные данные берут абсолютные значения измеренных параметров, в отличие от их комплексных аналогов в традиционной формулировке. При этом необходимо доказать однозначность решения и сформировать процедуру его получения.

Отметим, что изображение измеренных данных аналитической функцией позволяет установить фазу этой функции по её модулю [10]. В работе [11] показано, что коэффициент прохождения волн является достаточным информативным параметром для решения обратной задачи при определённых граничных условиях, которым

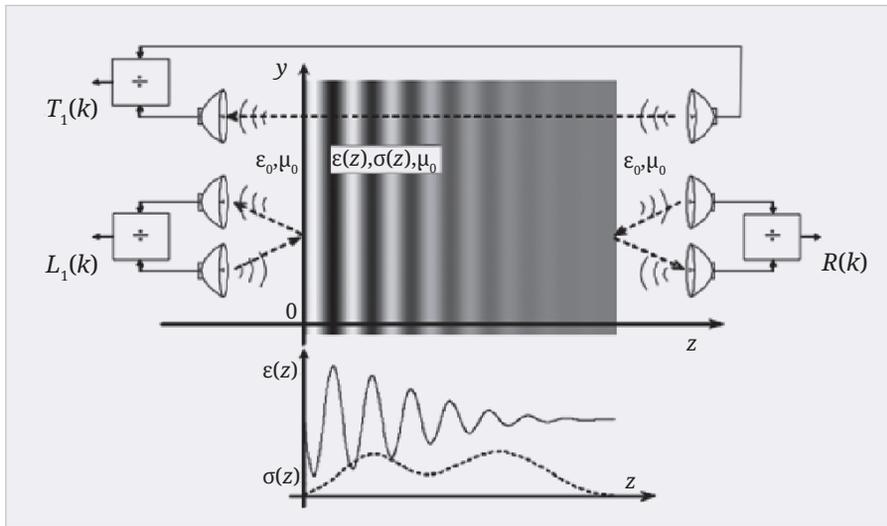


Рис. 1. К вычислению S-матрицы плоско-неоднородной среды, где ϵ_0 и μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости свободного пространства; ω – частота колебаний, определяющая волновой коэффициент $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ в свободном пространстве

удовлетворяет волна на границе раздела. Известен метод решения такой задачи для слоистой упругой среды, функция искомых параметров которой является кусочно-постоянной и имеет разрывы на регулярной сетке [12]. В работе [13] обоснована однозначность решения гиперболической задачи о распространении упругих волн в средах с непрерывным изменением параметров. С учётом обеспечения определённых характеристик возбуждения такой упругой среды описаны методы решения обратной задачи, когда исходными данными является зависимость амплитуды пройденной волны от времени распространения [14].

Целью статьи является анализ обратных задач рассеяния монохроматических волн для построения процедуры оценивания параметров плоского слоистого диэлектрика по известным абсолютным значениям коэффициента отражения или коэффициента прохождения.

Решение обратной задачи рассеяния по модулю коэффициента отражения плоской волны

Исходя из того, что асимптотический характер решений уравнений, которые моделируют квантово-механические [15] и электродинамические процессы [16], в некоторых случаях совпадает, можно предположить, что между коэффициентами этих волновых уравнений существует определённая зависимость. Известно, что при опре-

делённых условиях электродинамическую обратную задачу рассеяния можно привести к одномерной. Для этого к системе уравнений электромагнитного поля для плоской волны, которая распространяется над осесимметричной слоистой структурой, применяют метод разделения переменных.

Рассмотрим нормальное падение плоской электромагнитной волны на поверхность плоской осесимметричной структуры (рис. 1). Воспользуемся предположением о том, что плоскослоистая среда не имеет разрывов в функциях относительной диэлектрической проницаемости $\epsilon(z)$ и проводимости $\sigma(z)$, а также является немагнитной с относительной магнитной проницаемостью $\mu = 1$. Функции диэлектрической проницаемости $(\epsilon(z) - 1)$ и проводимости $\sigma(z)$ имеют также компактный носитель в правом полупространстве $z > 0$. В этом случае уравнение электромагнитного поля для электрической $E(z)$ и магнитной $H(z)$ составляющей напряжённости можно записать как:

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} E(z) \\ H(z) \end{bmatrix} = -i\omega \begin{bmatrix} 0 & \mu_0 \\ \epsilon_0\epsilon(z) - i\sigma(z) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(z) \\ H(z) \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Асимптотическое решение уравнения (1) можно записать через правосторонний $R(k_0)$ и левосторонний $L(k_0)$ коэффициенты отражения, а также коэффициенты пропускания $T_1(k_0)$ и $T_2(k_0)$:

$$E_r(z, k_0) = L(k_0) \exp(-ik_0z) + \exp(ik_0z) + o(1), \quad z \rightarrow -\infty; \quad (2)$$

$$E_i(z, k_0) = R(k_0) \exp(ik_0z) + \exp(-ik_0z) + o(1), \quad z \rightarrow \infty; \quad (3)$$

$$E_r(z, k_0) = T_1(k_0) \exp(ik_0z) + o(1), \quad z \rightarrow \infty; \quad (4)$$

$$E_i(z, k_0) = T_2(k_0) \exp(ik_0z) + o(1), \quad z \rightarrow -\infty. \quad (5)$$

Коэффициенты отражения и пропускания являются элементами матрицы рассеяния:

$$S = \begin{bmatrix} R & T_2 \\ T_1 & L \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Поскольку эти коэффициенты можно измерить экспериментально, и они при определённых условиях позволяют полностью охарактеризовать неизвестную плоскослоистую среду, их принято считать исходными данными для обратной задачи рассеяния.

В обратной задаче рассеяния диэлектрическая проницаемость ϵ_j , толщина d_j слоёв $j = 1, N$ и число N являются неизвестными величинами. В данном случае обратная задача рассеяния сформулирована как задача определения действительных параметров ϵ_j, d_j, N по абсолютным значениям коэффициента отражения $|L(\omega)|$ в предположении, что в материалах слоистой структуры отсутствуют потери.

Зафиксировав граничные условия на бесконечности для заданных элементов матрицы рассеяния (6), электродинамические процессы, описываемые уравнениями Максвелла, в одномерном случае можно также описать моделями потенциального рассеяния, такими как стационарное уравнение Шрёдингера (7):

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + (k^2 - W(x, k))\phi = 0 \quad (7)$$

и уравнение Дирака (8) с несимметричным потенциалом [124]:

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} - ik_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iq_3 & q^+ \\ q^- & -iq_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

В выражении (7) функция ϕ имеет смысл волновой функции, а $W(x, k)$ – энергонезависимого потенциала, причём $W(x, k) = \frac{1}{\sqrt[4]{\epsilon(x)}} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\sqrt[4]{\epsilon(x)}}{dx} \right) + ikp_0 \frac{\sigma(x)}{\epsilon(x)}$.

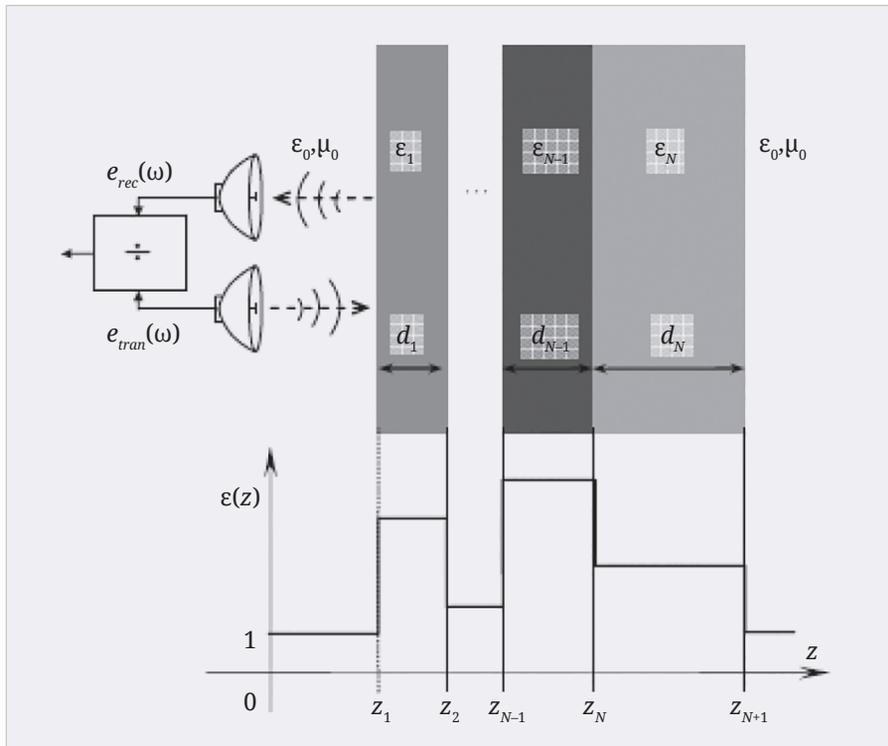


Рис. 2. Измерение коэффициента отражения от многослойной структуры

Переменные

$$V_1 = \sqrt[4]{\frac{\rho_0}{\varepsilon(x)}} H(x) - \sqrt[4]{\frac{\varepsilon(x)}{\rho_0^3}} E(x),$$

$$V_2 = \sqrt[4]{\frac{\rho_0}{\varepsilon(x)}} H(x) + \sqrt[4]{\frac{\varepsilon(x)}{\rho_0^3}} E(x)$$

позволяют осуществить переход от уравнений Максвелла к уравнениям Дирака или уравнениям Захарова-Шабата (8). Потенциалами в этих уравнениях выступают

$$q_3 = -\frac{i \sigma(x)}{2 \varepsilon(x)} \rho_0,$$

$$q^\pm = -\frac{1}{4} \frac{d \ln \varepsilon(x)}{dx} \rho_0 \mp \frac{1}{2} \frac{\sigma(x)}{\varepsilon(x)} \rho_0,$$

а $\sigma(x)$ – проводимость, $\rho_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ –

характеристический импеданс свободного пространства.

Исследование одномерных обратных задач рассеяния ассоциируют с граничными условиями на бесконечности, которые позволяют описать матрицу рассеяния (6). Такие граничные условия, как правило, имеют физическую интерпретацию, поскольку отражённая волна имеет комплексную амплитуду, соответствующую коэффициенту отражения, а прошедшая сквозь среду волна имеет амплитуду коэффициента прохождения.

В частном случае среды без потерь рассеяние плоской электромагнитной волны можно смоделировать уравне-

нием Шрёдингера (7) с энергонезависимым потенциалом

$$W(x, k)|_{\sigma=0} = U(x) \equiv V(x):$$

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + (k^2 - V(x, k)) \phi = 0. \quad (9)$$

Потенциал $V(x)$ такого уравнения можно выразить через функцию диэлектрической проницаемости:

$$V(x) = \frac{d^2}{dx^2} \ln \left[\sqrt[4]{\varepsilon(x)} \right] + \left(\frac{d}{dx} \ln \left[\sqrt[4]{\varepsilon(x)} \right] \right)^2. \quad (10)$$

При условии, что слагаемые энергонезависимого потенциала $W(x, k)$ стремятся к нулю на бесконечности, асимптоты решений уравнения Шрёдингера будут соответствовать асимптотике решений системы уравнений Максвелла для составляющих электромагнитного поля. Соответственно, элементы матрицы рассеяния (6) могут служить исходными данными как для обратной задачи рассеяния для уравнения Шрёдингера, так и для обратной задачи для уравнений Максвелла. Рассмотрим уравнение Шрёдингера (9), энергонезависимый потенциал которого удовлетворяет условию

$$V(x) \in L^2_2(\mathbb{R}) =$$

$$= \left\{ V(x) : \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|^2) |V(x)| dx < \infty \right\}.$$

Тогда решениями Ёоста такого уравнения называют функции f_1 и f_2 , кото-

рые на бесконечности удовлетворяют условиям:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x, k) \exp(-ikx) = 1, \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x, k) \exp(ikx) = 1.$$

С помощью метода вариации постоянной можно показать, что в противоположных направлениях на бесконечности решения Ёоста имеют асимптотику, которая определяется выражениями

$$f_1(x, k) =$$

$$= \begin{cases} \exp(-ikx) + o(1), x \rightarrow \infty \\ A_1(k) \exp(ikx) + \\ + B_1(k) \exp(-ikx) + o(1), x \rightarrow -\infty \end{cases}; \quad (12)$$

$$f_2(x, k) =$$

$$= \begin{cases} B_2(k) \exp(ikx) + \\ + A_2(k) \exp(-ikx) + o(1), x \rightarrow \infty \\ \exp(-ikx) + o(1), x \rightarrow -\infty \end{cases}, \quad (13)$$

где $A_1(k)$, $A_2(k)$, $B_1(k)$, $B_2(k)$ – коэффициенты решений Ёоста, или элементы матрицы передачи.

Из теории обратных задач для потенциального рассеяния известно, что решения Ёоста имеют особые аналитические свойства. Эти аналитические свойства играют ключевую роль в решении обратной задачи рассеяния. Приведение исходных данных обратной задачи к моделям в виде решений Ёоста даёт возможность корректно решать обратные задачи рассеяния для случаев, где присутствует контрастное изменение параметров сред в окрестности поверхностей раздела.

Свойства решений Ёоста для плоско-слоистых сред

Для определения основных свойств элементов матрицы рассеяния и решений Ёоста рассмотрим задачу рассеяния плоской волны, нормально падающей на плоскую слоистую диэлектрическую структуру. В этом случае напряжённость поля $e(z)$ в произвольной точке z можно определить из волнового уравнения:

$$\frac{d^2 e(z)}{dz^2} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon(z) e(z) = 0. \quad (14)$$

Будем рассматривать многослойные диэлектрические структуры, в которых функция диэлектрической проницаемости $\varepsilon(z)$ является кусочно-постоянной, а магнитная проницаемость

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_0(\omega) \\ b_0(\omega) \end{bmatrix} &= \prod_{j=0}^N \left(\frac{1}{2\rho_{j+1}} \begin{bmatrix} (\rho_{j+1} + \rho_j) e^{-ik_j d_{j+1}} & (\rho_{j+1} - \rho_j) e^{ik_j d_{j+1}} \\ (\rho_{j+1} - \rho_j) e^{-ik_j d_{j+1}} & (\rho_{j+1} + \rho_j) e^{ik_j d_{j+1}} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_{N+1}(\omega) \\ b_{N+1}(\omega) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2\rho_1} \begin{bmatrix} (\rho_1 + \rho_0) e^{-ik_0 d_1} & (\rho_1 - \rho_0) e^{ik_0 d_1} \\ (\rho_1 - \rho_0) e^{-ik_0 d_1} & (\rho_1 + \rho_0) e^{ik_0 d_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0(\omega) & B_0(\omega) \\ B_0(-\omega) & A_0(-\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{N+1}(\omega) \\ b_{N+1}(\omega) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A_0(\omega) & B_0(\omega) \\ B_0(-\omega) & A_0(-\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{N+1}(\omega) \\ b_{N+1}(\omega) \end{bmatrix} \quad (17) \end{aligned}$$

$\mu = 1$. При этом считаем, что рассеянное на такой структуре поле, множество значений которого будет составлять исходные данные для обратной задачи, измеряется в свободном пространстве (рис. 2) с волновым числом $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$.

Для слоистой структуры с однородными электрическими параметрами материала решение уравнения (14) имеет вид:

$$e(z) = a_j(\omega) \exp(-ik_j(z - d_j)) + b_j(\omega) \exp(ik_j(z - d_j)), \quad (15)$$

где $a_j(\omega)$ и $b_j(\omega)$ – коэффициенты, определяющие соотношение между волнами, которые распространяются в противоположных направлениях; $k_j = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ – волновое число в j -м слое с диэлектрической проницаемостью ϵ_j ; $j = 0, (N-1)$ – номер слоя в структуре из N таких полос.

Удовлетворяя граничные условия на поверхности раздела между j -м и $(j+1)$ -м слоями, взаимосвязь коэффициентов $a_j(\omega)$ и $b_j(\omega)$ можно определить зависимостью:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_j(\omega) \\ b_j(\omega) \end{bmatrix} &= \frac{1}{2\rho_{j+1}} \begin{bmatrix} (\rho_{j+1} + \rho_j) e^{-ik_j d_{j+1}} & (\rho_{j+1} - \rho_j) e^{ik_j d_{j+1}} \\ (\rho_{j+1} - \rho_j) e^{-ik_j d_{j+1}} & (\rho_{j+1} + \rho_j) e^{ik_j d_{j+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{j+1}(\omega) \\ b_{j+1}(\omega) \end{bmatrix}, \quad (16) \end{aligned}$$

где $\rho_j = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_j}}$ – характеристический импеданс; d_j – толщина j -го слоя.

Рекуррентное перемножение согласно формуле (16) даёт возможность установить такую взаимосвязь для коэффициентов в материалах $j = 0$ и $j = N + 1$, которые окружают многослойную структуру (17), где $A_0(\omega)$ и $B_0(\omega)$ – коэффициенты решений Йоста

всей структуры; $A_j(\omega)$ и $B_j(\omega)$ – коэффициенты решений Йоста этой структуры без учёта влияния её первых j слоёв. При этом принято $d_N = 0$.

Коэффициенты решений Йоста $A_0(\omega)$ и $B_0(\omega)$ всей структуры можно охарактеризовать соотношением между амплитудами волн, распространяющихся в противоположных направлениях при условии отсутствия падающей волны с одной из сторон.

Например, при зондировании структуры с левой стороны (рис. 2) отсутствующей будет волна в правом полупространстве, распространяющаяся в направлении на структуру $b_{N+1}(\omega) = 0$. Отсюда равенство (17) приобретает вид:

$$\begin{bmatrix} a_0(\omega) \\ b_0(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0(\omega) a_{N+1}(\omega) \\ B_0(-\omega) b_{N+1}(\omega) \end{bmatrix}. \quad (18)$$

На основе формулы (18) определим коэффициент пропускания и левосторонний коэффициент отражения:

$$T(\omega) = \frac{a_{N+1}(\omega)}{a_0(\omega)} = \frac{1}{A_0(\omega)}; \quad (19)$$

$$L(\omega) = \frac{b_0(\omega)}{a_0(\omega)} = \frac{B_0(-\omega)}{A_0(\omega)}. \quad (20)$$

В противоположном случае, когда зондирование многослойной структуры осуществляется только с правой стороны, будем иметь $a_0(\omega) = 0$. Тогда соотношение (17) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_0(\omega) & B_0(\omega) \\ B_0(-\omega) & A_0(-\omega) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_0(\omega) \\ b_0(\omega) \end{bmatrix} &= \\ = \begin{bmatrix} A_0(-\omega) & -B_0(\omega) \\ -B_0(-\omega) & A_0(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0(\omega) \\ b_0(\omega) \end{bmatrix} &= \\ = \begin{bmatrix} a_{N+1}(\omega) \\ b_{N+1}(\omega) \end{bmatrix}, \quad (21) \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{bmatrix} -B_0(\omega) b_0(\omega) \\ A_0(\omega) b_0(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{N+1}(\omega) \\ b_{N+1}(\omega) \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Тогда коэффициент пропускания и правосторонний коэффициент отражения можно определить формулами

$$T(\omega) = \frac{b_0(\omega)}{b_{N+1}(\omega)} = \frac{1}{A_0(\omega)}; \quad (23)$$

$$R(\omega) = \frac{a_{N+1}(\omega)}{b_{N+1}(\omega)} = -\frac{B_0(\omega)}{A_0(\omega)}. \quad (24)$$

Коэффициент пропускания $T(\omega)$, который для материалов слоёв без потерь не зависит от направления падения волны: $T(\omega) = T_1(\omega) = T_2(\omega)$, и коэффициенты отражения $R(\omega)$ $L(\omega)$ являются элементами матрицы рассеяния диэлектрической структуры. Из полученных формул (19), (20), (23) и (24) видно, что все элементы матрицы рассеяния удовлетворяют условию симметрии. Следствием выполнения условий симметрии является то, что преобразование Фурье от коэффициентов отражения и пропускания являются действительными функциями.

Произведение матриц в выражении (17) свидетельствует, что коэффициенты решений Йоста $A_j(\omega)$ и $B_j(\omega)$ для $j = 0, N - 1$ являются конечными суммами комплексных экспонент

$$A_j(\omega) = \sum_{p=1}^{M_j} \alpha_j(p) \exp(iv_j(p)\omega); \quad (25)$$

$$B_j(\omega) = \sum_{p=1}^{M_j} \beta_j(p) \exp(iv_j(p)\omega), \quad (26)$$

где $\alpha_j(p)$ и $\beta_j(p)$ – комплексные коэффициенты конечных сумм, $v_j(p)$ – действительные коэффициенты, которые имеют физический смысл времени запаздывания при прохождении волны в многослойной структуре; параметр M_j является конечным числом и определяется количеством слоёв в структуре и их параметрами.

Во время эксперимента для измерения доступны только мгновенные значения амплитуды излучённого $e_{ИЗЛ}(\omega)$ и принятого $e_{ПРМ}(\omega)$ сигналов в точке, которая находится на определённом расстоянии d_0 от поверхности самой структуры. Следовательно, коэффициент отражения $L_m(\omega)$, вычисленный как отношение этих измеренных величин, будет иметь дополнительный набег фазы

$$L_m(\omega) = \frac{e_{ИЗЛ}(\omega)}{e_{ПРМ}(\omega)}. \quad (27)$$

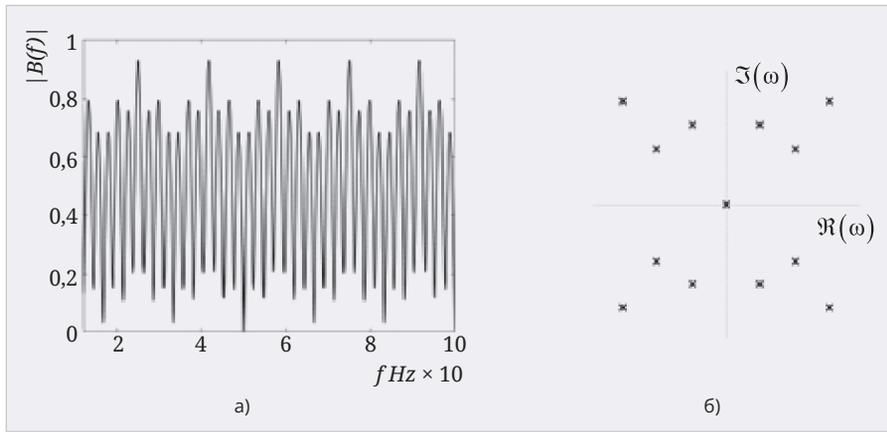


Рис. 3. Частотная зависимость абсолютного значения коэффициента, который описывается тригонометрическим полиномом с шестью периодическими сериями недействительных нулей (а), и распределение одной серии этих нулей в комплексной плоскости (б)

Этот набег фазы можно установить из выражений (15) и (17), показав различие между коэффициентами решений Йоста $A_0(\omega)$ и $B_0(\omega)$ слоистой структуры и значениями коэффициентов $A_m(\omega)$, $B_m(\omega)$, которые определены путём пересчёта результатов измерений:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_m(\omega) & B_m(\omega) \\ B_m(-\omega) & A_m(-\omega) \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} e^{-ik_0 d_0} & 0 \\ 0 & e^{ik_0 d_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0(\omega) & B_0(\omega) \\ B_0(-\omega) & A_0(-\omega) \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} A_0(\omega) e^{-ik_0 d_0} & B_0(\omega) e^{-ik_0 d_0} \\ B_0(-\omega) e^{ik_0 d_0} & A_0(-\omega) e^{ik_0 d_0} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (28)$$

Из полученного выражения (28) видно, что коэффициенты решений Йоста $A_m(\omega)$ и $B_m(\omega)$ можно разложить в конечный ряд, в котором значения аргументов комплексных экспонент будут отличаться от значений $\nu_0(p)$ в формулах (25) и (26) на величину запаздывания $d_0 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ за счёт прохождения волной расстояния d_0 в свободном пространстве:

$$\begin{aligned} A_m(\omega) &= A_0(\omega) \exp(-ik_0 d_0) = \\ &= \sum_{p=1}^{M_0} \alpha_0(p) \exp[i\omega(\nu_0(p) - d_0 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0})] = \\ &= \sum_{p=1}^{M_0} \alpha_0(p) \exp(i\omega \tau_p); \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} B_m(\omega) &= B_0(\omega) \exp(-ik_0 d_0) = \\ &= \sum_{p=1}^{M_0} \beta_0(p) \exp[i\omega(\nu_0(p) - d_0 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0})] = \\ &= \sum_{p=1}^{M_0} \beta_0(p) \exp(i\omega \tau_p). \end{aligned} \quad (30)$$

Отсюда можно определить, какой набег фазы присутствует в измеренных коэффициентах отражения и прохождения:

$$L_m(\omega) = \frac{B_m(-\omega)}{A_m(\omega)} = L(\omega) \exp(2ik_0 d_0); \quad (31)$$

$$T_m(\omega) = \frac{1}{A_m(\omega)} = T(\omega) \exp(ik_0 d_0). \quad (32)$$

Таким образом, можно утверждать, что импульсная характеристика любой многослойной структуры без потерь состоит из бесконечной суммы δ -функций. Кроме того, расположение этих δ -функций на оси τ определяет линейная комбинация $(lT_1 + mT_2 + \dots)$, где l и m являются произвольными целыми числами.

Для описания рассеяния электромагнитных волн проведём замену исходных данных коэффициентами $A_0(\omega)$ и $B_0(\omega)$ в решениях Йоста (12) и (13). Для заданных комплекснозначных функций $A_0(\omega)$ и $B_0(\omega)$ параметры диэлектрической слоистой среды можно вычислить согласно рекуррентной процедуре (17), осуществив предварительно оценку всех параметров $(\alpha_0, \beta_0, \nu_0, M_0)$ конечных тригонометрических сумм:

$$A_0(\omega) \doteq \sum_{p=1}^{M_0} \alpha_0(p) \exp(-i\nu_0(p)\omega); \quad (33)$$

$$B_0(\omega) \doteq \sum_{p=1}^{M_0} \beta_0(p) \exp(-i\nu_0(p)\omega). \quad (34)$$

Поэтому сформулированная обратная задача рассеяния сводится к определению комплекснозначных функций $A_0(\omega)$ и $B_0(\omega)$ по их абсолютным значениям. Последние непосредственно вычисляются по исходным данным задачи – модулю частотной зависимости коэффициента отражения $|L(\omega)| = |R(\omega)|$, согласно тождествам

$$|A_0(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 - |L(\omega)|^2}} \quad \text{и}$$

$$|B_0(\omega)| = \frac{|L(\omega)|}{\sqrt{1 - |L(\omega)|^2}}.$$

Из теории операторов известно, что спектральная задача (14) для оператора

$$H = -\frac{1}{\mu_0 \mu_{\epsilon_0} \epsilon(z) e(z)} \frac{d^2 e(z)}{dz^2}$$

имеет непрерывный спектр на положительной части действительной полуоси [93]. Из этого следует, что в верхней комплексной полуплоскости ω и на действительной оси функция $A_0(\omega)$ не равна нулю. Кроме этого, свойство аналитичности в верхней полуплоскости даёт возможность формулировать задачу реконструкции фазы этой функции по её модулю.

Комплексное значение коэффициента

$$A_0(\omega) = |A_0(\omega)| \exp(i\varphi_A(\omega))$$

можно восстановить по его абсолютному значению

$$|A_0(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 - |L(\omega)|^2}},$$

определяя аргумент комплексной экспоненты по формуле

$$\varphi_A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\mathcal{G}_n \omega) + \omega \nu_0(M_0), \quad (35)$$

где коэффициенты c_n и \mathcal{G}_n можно вычислить аналитически по коэффициентам α_0 и ν_0 ряда (33).

Искомый комплексный коэффициент рассеивания $A_0(\omega)$ можно определить по формуле

$$A_0(\omega) = \nu_0(N+1) \tau^{-\frac{N}{2}} \prod_{n=1}^N (\tau - \exp(i\delta f_n)), \quad (36)$$

где коэффициент $\nu_0(N+1)$ и нули f_n функции $A_0(\omega)$ определяются из коэффициентов и корней известного модуля $|A_0(\omega)|$, записанного в виде тригонометрического полинома

$$\begin{aligned} |A_0(\omega)|^2 &= A_0(\omega) A_0(-\omega) = \\ &= W_0(2N+1) \tau^{-(N+1)} \prod_{q=1}^{2N} (\tau - \exp(i\delta g_q)). \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь коэффициенты многочленов $\nu_0(N+1)$ и $W_0(2N+1)$ соотносятся как

$$\nu_0(N+1) = \sqrt{\frac{W_0(2N+1)}{\chi_1}},$$

где

$$\chi_1 = (-1)^N \prod_{q=1}^{2N} \exp(i\delta g_q).$$

Значения f_n , $n=1, N$ выбираем среди корней $g_q = g'_q + i g''_q$ тригонометрического полинома (36) таким образом,

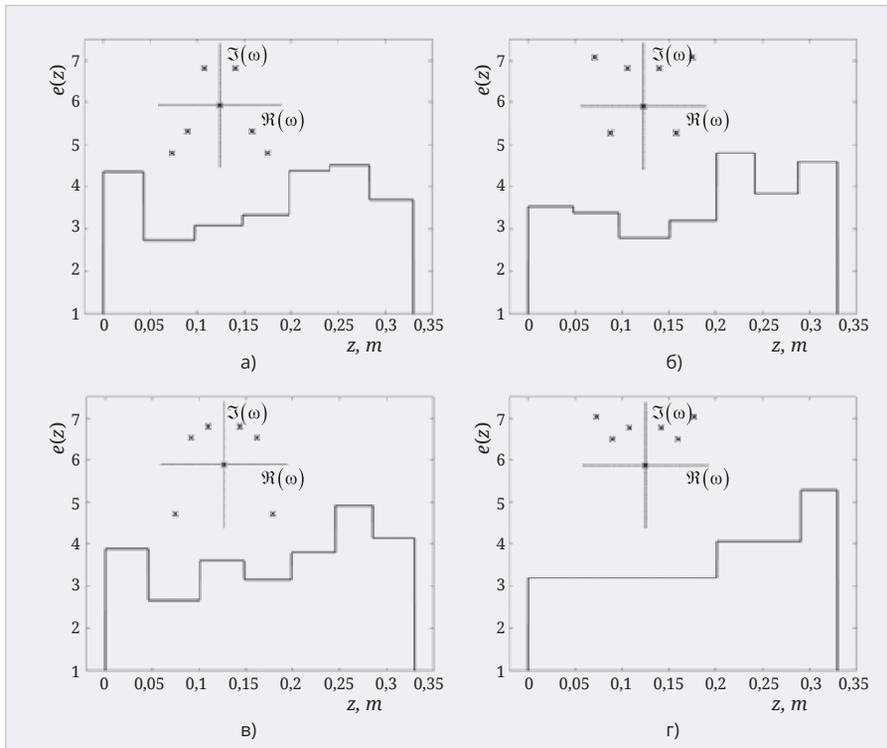


Рис. 4. Пример слоистых структур и соответствующее расположение корней функции в полосе Π , которые получены как решения обратной задачи для модуля

что $f_n = g_p$ где l принадлежит множеству индексов F , которое содержит индексы корней g_p лежащих в нижней комплексной полуплоскости, или $F : l \in \{g'' < 0\}$.

В отличие от коэффициента рассеяния $A_0(\omega)$, область расположения нулей коэффициента $B_0(\omega)$ в комплексной плоскости не является ограниченной. Поэтому решение задачи об установлении комплексного коэффициента $B_0(\omega)$ по его абсолютному значению

$$|B_0(\omega)| = \frac{|L(\omega)|}{\sqrt{1-|L(\omega)|^2}}$$

не является единственным.

Рассмотрим причину неоднозначности решения такой задачи. Каждый ноль ω_0 функции $B_0(\omega)$ с ненулевой мнимой частью $\Im(\omega_0) \neq 0$ является причиной двужначности решения задачи об установлении комплекснозначной функции $B_0(\omega)$ по её модулю $|B_0(\omega)|$. Эти решения

$$B_{0,1}(\omega) = |B_0(\omega)| \exp(i\varphi_B(\omega));$$

$$B_{0,2}(\omega) = |B_0(\omega)| \exp(i\varphi_B(\omega) + i\varphi_\eta(\omega))$$

отличаются фазовым множителем $\exp(i\varphi_\eta(\omega))$, где

$$\varphi_B(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathbf{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |B_0(\omega')|}{\omega - \omega'} d\omega' + \omega v_0(M_0); \quad (38)$$

$$\varphi_\eta(\omega) = \quad (39)$$

$$= \begin{cases} 2 \arctan \left(\frac{\Im(\omega_0)}{\omega - \Re(\omega_0)} \right), & \omega - \Re(\omega_0) > 0; \\ \pi \operatorname{sign}(\Im(\omega_0)), & \omega - \Re(\omega_0) = 0; \\ 2 \arctan \left(\frac{\Im(\omega_0)}{\omega - \Re(\omega_0)} \right) + 2\pi \operatorname{sign}(\Im(\omega_0)), & \omega - \Re(\omega_0) < 0. \end{cases}$$

Для того чтобы найти фазу $\varphi_\eta(\omega)$ множителя Бляшке, осуществим следующие преобразования:

$$\frac{\omega - \overline{\omega_0}}{\omega - \omega_0} = \frac{\omega - \Re(\omega_0) + i\Im(\omega_0)}{\omega - \Re(\omega_0) - i\Im(\omega_0)} = \frac{|\omega - \overline{\omega_0}| \exp(i\eta)}{|\omega - \omega_0| \exp(-i\eta)} = \exp(2i\eta), \quad (40)$$

где η является аргументом некоторой комплекснозначной функции с действительной $\omega - \Re(\omega_0)$ и мнимой $\Im(\omega_0)$ частями.

Учитывая многозначность функции арктангенс в комплексной плоскости, из выражения (40) можно установить, что фаза множителя Бляшке имеет вид (39).

К появлению нулей как в верхней, так и в нижней комплексных полуплоскостях приводит то, что исходными данными (по условиям задачи) являются функция

$$|B_0(\omega)| = \frac{|L(\omega)|}{\sqrt{1-|L(\omega)|^2}}$$

или её квадрат

$$|B_0(\omega)|^2 = B_0(\omega) B_0(-\omega) = \sum_{p=1}^K y_p \exp(i\gamma_p \omega). \quad (41)$$

Кроме того, идентифицировать принадлежность корня ω_0 функции $B_0(\omega)$ к одной из полуплоскостей комплексной плоскости невозможно.

Поэтому задача о восстановлении фазы по модулю функции $|B_0(\omega)|$ будет иметь два решения: $\varphi_B(\omega)$ и $\varphi_B(\omega) + \varphi_\eta(\omega)$.

Как частный случай рассмотрим решение задачи об установлении по абсолютной величине $|B_0(\omega)|$ фазы функции

$$B_0(\omega) = S(\omega)(\omega - \omega_0 - \Delta_\omega)(\omega - \omega_0 - 2\Delta_\omega)(\omega - \omega_0 - 3\Delta_\omega) \dots,$$

которая имеет бесконечное количество действительных корней $\omega_0 \in \mathbb{R}$, периодически расположенных с шагом Δ_ω . Такую функцию можно записать в виде

$$B_0(\omega) = S(\omega) \left(\exp\left(\frac{2i\pi\omega}{\Delta_\omega}\right) - \exp\left(\frac{2i\pi\omega_0}{\Delta_\omega}\right) \right)$$

Квадрат модуля этой функции, заданный в качестве исходных данных в задаче восстановления, представим в виде:

$$|B_0(\omega)|^2 = B_0(\omega) B_0(-\omega) = |S(\omega)|^2 \left(\exp\left(\frac{2i\pi\omega}{\Delta_\omega}\right) - \exp\left(\frac{2i\pi\omega_0}{\Delta_\omega}\right) \right) \times \left(\exp\left(\frac{-2i\pi\omega}{\Delta_\omega}\right) - \exp\left(\frac{-2i\pi\omega_0}{\Delta_\omega}\right) \right) = 4|S(\omega)|^2 \sin^2\left(\frac{\pi(\omega - \omega_0)}{\Delta_\omega}\right). \quad (42)$$

Фазу такой функции можно вычислить с помощью интеграла Коши:

$$\varphi_B(\omega) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |B_0(\omega')|}{\omega - \omega'} d\omega' + \omega v_0(M_0) = \varphi_S(\omega) + \omega v_0(M_0) + \frac{1}{2\pi} \mathbf{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \left| 4 \sin^2 \left(\pi \frac{\omega - \omega'}{\Delta_\omega} \right) \right|}{\omega - \omega'} d\omega'. \quad (43)$$

Последнее выражение определяет фазовое слагаемое, вносимое периодически расположенными на действительной оси корнями:

$$\begin{aligned} \varphi_{\sin}(\omega) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathbf{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \left| 4 \sin^2 \left(\pi \frac{\omega - \omega'}{\Delta_{\omega}} \right) \right|}{\omega - \omega'} d\omega' = \\ &= \frac{1}{\pi} \mathbf{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \left| \sin \left(\pi \frac{\omega - \omega'}{\Delta_{\omega}} \right) \right|}{\omega - \omega'} d\omega'. \end{aligned} \quad (44)$$

В работе [17] аналитически установлен результат преобразования Гильберта такого класса функций:

$$\frac{1}{\pi} \mathbf{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \left| \sin \left(\pi \frac{\omega - \omega'}{\Delta_{\omega}} \right) \right|}{\omega - \omega'} d\omega' = -\pi \left[\frac{\omega}{\pi} \right], \quad (45)$$

где $[]$ – обозначение оператора, выделяющего целое число дробного аргумента.

Из выражений (44) и (45) следует, что фазовое слагаемое вносит лишь периодические скачки в фазу коэффициента $B_0(\omega)$:

$$\varphi_{\sin}(\omega) = -\pi \left[\frac{\omega + \omega_0}{\Delta_{\omega}} \right]. \quad (46)$$

Итак, проведённый анализ случая, когда коэффициент $B_0(\omega)$ имеет периодически расположенные корни на действительной оси, указывает на то, что эти корни не приводят к неоднозначности решения задачи установления фазы по абсолютному значению $|B_0(\omega)|$.

Количество C возможных решений задачи об установлении комплексной величины $B_0(\omega)$ по её модулю можно определить непосредственно из свойств симметрии нулей функции $|B_0(\omega)|^2$. Для чётного значения N это количество равно

$$C = 2^{\frac{N}{2}}, \text{ а для нечётного } - C = 2^{\frac{N-1}{2}}.$$

Обсуждение полученных результатов

В качестве примера на рис. 3а приведём исходные данные $|B_0(\omega)|$ для обратной задачи, которая решена численно.

Соответствующая функция $B_0(\omega)B_0(-\omega)$, продолженная аналитически на всю комплексную плоскость, имеет в полосе Π три пары (рис. 3б) недействительных симметричных относительно мнимой оси нулей, а потому порождает $2^3 = 8$ различных структур.

Ниже (рис. 4) приводим четыре структуры; остальные четыре получены из них изменением направления z на противоположное.

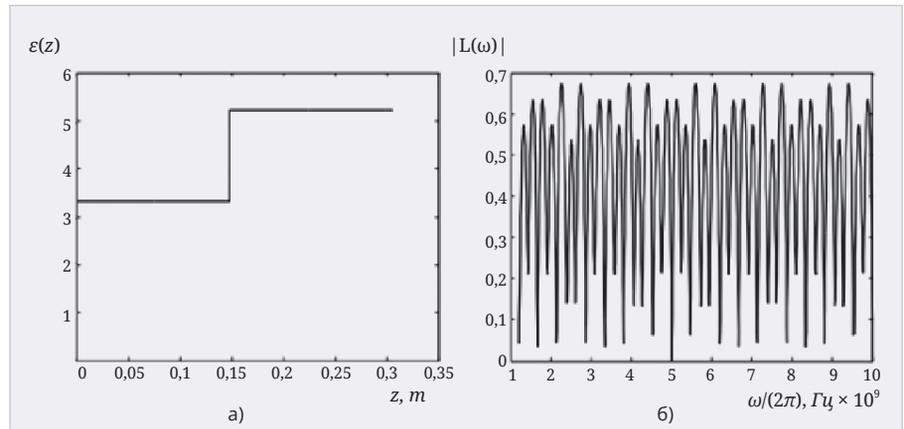


Рис. 5. Оригинальная функция диэлектрической проницаемости (а) и модуль коэффициента отражения (б), который использован как исходные данные для обратной задачи

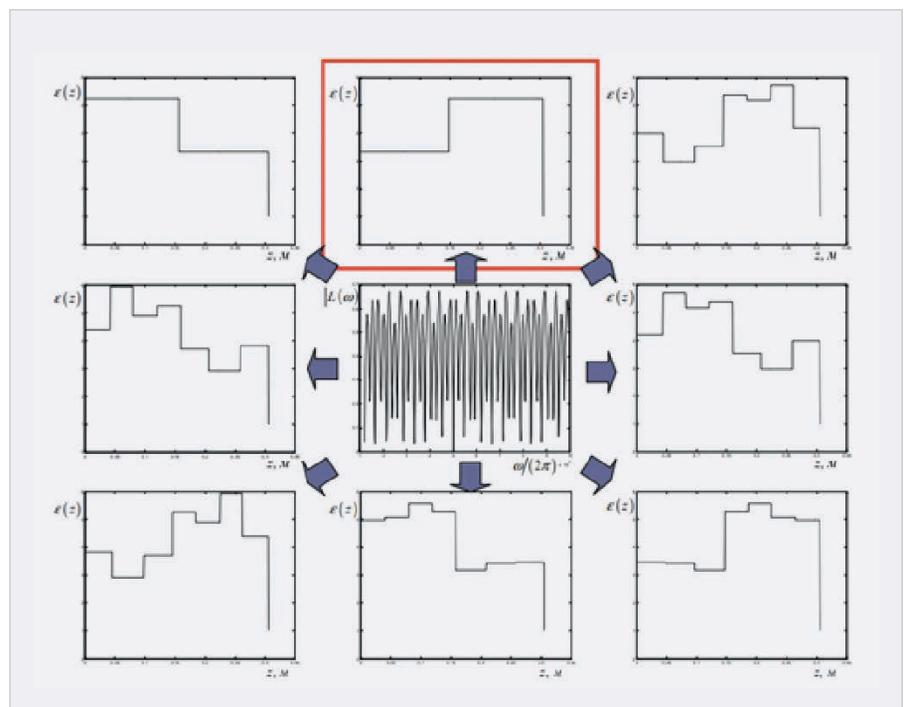


Рис. 6. Множество решений обратной задачи рассеяния, полученных по модулю коэффициента отражения в центре рисунка

По известному абсолютному значению $|L(\omega)|$ коэффициента отражения (рис. 5б) решена обратная задача рассеяния, которая включает установление комплекснозначных функций коэффициентов рассеяния $A_0(\omega)$ и $B_0(\omega)$, а также определение параметров каждого из слоёв многослойной структуры. Поскольку решение такой задачи является не единственным, для заданных исходных данных найдено множество решений (рис. 6). Среди этого множества будет тот, который соответствует оригинальному (рис. 5а). Можно проверить, что диэлектрические структуры, формирующие множество решений обратной задачи, будут иметь коэффициент отражения, идентичный тому,

который представлен на рис. 5б. Это свидетельствует о правильности утверждений, положенных в основу предложенного метода решения обратной задачи и обеспечения единственности её решения.

Заключение

Описанная процедура нахождения многозначного решения обратной задачи имеет опосредованную практическую ценность, поскольку не позволяет единым образом охарактеризовать исследуемую структуру по измеренным амплитудным характеристикам рассеяния или прохождения электромагнитной волны. Поэтому важной проблемой является регуляризация этой задачи путём

наложения дополнительных условий, позволяющих её решить однозначно. Анализ формулы (17) показывает, что диэлектрическая проницаемость ϵ_1 и толщина d_1 первого слоя являются достаточными параметрами для однозначного решения обратной задачи прохождения при заданном $|T(\omega)|$ только тогда, когда все значения оптических толщин $d_j = \sqrt{\epsilon_j \epsilon_0 \mu_0}$ являются несоизмеримыми (не принадлежат узлам любой регулярной сетки).

Литература

1. Ключев В.В. Неразрушающий контроль и диагностика: Справочник [2-е изд.]. М.: Машиностроение, 2003. 656 с.
2. Фаддеев Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния // Успехи математических наук. 1959. Т. 14, Вып. 4(88). С. 57–119.
3. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977. 332 с.
4. Крейн М.Г. Об определении потенциала частицы по её S-функции // ДАН СССР. 1955. Т. 105, № 3. С. 433–436.
5. Balanis G.N. Inverse scattering: determination of inhomogeneities in sound speed // J. Math. Phys. 1982. Vol. 23, No 12. P. 2562–2568.
6. Джала В.Р., Капко Л.И. Радиоволновая диагностика плоскостойких диэлектриков на основе решения обратной задачи // Физико-химическая механика материалов. 2009. Т. 45, № 3. С. 117–122.
7. Завьялов А.С., Дунаевский Г.Е. Измерение параметров материалов на сверхвысоких частотах. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985. 215 с.
8. Анпеталин В.Н., Зубов А.С., Казанцев Ю.Н., Солосин В.С. Устройство для измерения комплексного коэффициента отражения в квазиоптическом тракте. RU 2079144 C1, G01R 27/06. Опубл. 10.05.1997.
9. Roome S.J. Analysis of quadrature detectors using complex envelope notation // IEE Proceedings F: Radar and Signal Processing. 1989. Vol. 136, Issue 2. P. 95–100.
10. Тихонравов А.В., Клибанов М.В., Зуев И.В. Численное исследование бесфазной обратной задачи рассеяния в тонкоплёночной оптике // Обратные задачи. 1995. Т. 11, № 1. P. 251–270.
11. Claerbout J.F. Synthesis of a layered medium from its acoustic transmission response // Geophysics. 1968. № 33. P. 264–269.
12. Тихонов А.Н., Тихонравов А.В., Трубецков М.К. Методы оптимизации второго порядка в задачах синтеза многослойных покрытий // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1993. Т. 33, № 10. С. 1518–1535.
13. Цициунь Л., Юаньмин В. О единственности обратной задачи для одномерного волнового уравнения из данных передачи // SIAM Journal on Applied Mathematics, 1997. Vol. 57, No. 1. P. 195–204.
14. Rakesh P. Sacks Impedance inversion from transmission data for the wave equation // Wave Motion. 1996. Vol. 24. P. 263–274.
15. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. М.: Мир, 1969. 600 с.
16. Stratton J.A. Electromagnetic theory. New-York, NY: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1941. 640 p.
17. Mashreghi J. Hilbert transform of log |f| // Proceedings of the American Mathematical Society. 2002. Vol. 130, No. 3. P. 683–688.



ЭЛЕКОНД
РАЗРАБОТКА И ПРОИЗВОДСТВО КОНДЕНСАТОРОВ

<p>Оксидно-электролитические алюминиевые конденсаторы K50-... Номинальное напряжение, $U_{ном}$, В, Номинальная емкость, $S_{ном}$, мкФ, Диапазон температур среды при эксплуатации, $T_{ср}$, °С</p>	<p>3,2 ... 485 1,0 ... 470 000 -60 ... 125</p>	
<p>Объемно-пористые танталовые конденсаторы K52-... Номинальное напряжение, $U_{ном}$, В, Номинальная емкость, $S_{ном}$, мкФ, Диапазон температур среды при эксплуатации, $T_{ср}$, °С</p>	<p>3,2 ... 200 1,5 ... 60 000 -60 ... 175</p>	
<p>Оксидно-полупроводниковые танталовые конденсаторы K53-... Номинальное напряжение, $U_{ном}$, В, Номинальная емкость, $S_{ном}$, мкФ, Диапазон температур среды при эксплуатации, $T_{ср}$, °С</p>	<p>2,5 ... 63 0,033 ... 2 200 -60 ... 175</p>	
<p>Суперконденсаторы K58-... Номинальное напряжение, $U_{ном}$, В, Номинальная емкость, $S_{ном}$, Ф, Диапазон температур среды и эксплуатации, $T_{ср}$, °С</p>	<p>2,5 ... 2,7 1,0 ... 4 700 -60 ... 65</p>	
<p>Накопители электрической энергии на основе модульной сборки суперконденсаторов НЭЭ, МИК, МИЧ, ИТИ Номинальное напряжение, $U_{ном}$, В, Номинальная емкость, $S_{ном}$, Ф, Диапазон температур среды при эксплуатации, $T_{ср}$, °С</p>	<p>5,0 ... 48 0,08 ... 783 -60 ... 65</p>	

Россия, 427968, Удмуртская Республика, г. Сарапул, ул. Калинина, 3
 Тел.: (34147) 2-99-53, 2-99-89, 2-99-77, факс: (34147) 4-32-48, 4-27-53
 e-mail: elecond-market@elcudm.ru, www.elecond.ru

Реклама